Stima dell'incertezza di misura nell'ambito di attività sperimentali di prova e taratura

POLITECNICO MILANO 1863

Area Affari Generali e Supporto Strategico
Servizio Qualità di Ateneo

SQuA/LNG 02.012 - Agg. 02
17/06/2022

Linea guida

Stima dell'incertezza di misura nell'ambito di attività sperimentali di prova e taratura

SQuA/LNG 02.012

Aggiornamento 02

del 17/06/2022

Verifica e approvazione: Staff SQuA	Responsabile Assicurazione Qualità di Ateneo
Stefano Menegozzi	Stefano Menegozzi

REVISIONI

Agg	Modifiche

Sommario

1. Scopo e campo di applicazione

La presente linea guida definisce la metodologia di base per la stima dell'incertezza di misura nell'ambito delle attività sperimentali di prova e di taratura eseguite dalle Strutture aderenti al Sistema Qualità Politecnico.

2. Riferimenti

- JCGM:2008 "Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement";
- ISO/IEC Guide 98-3:2008, Uncertainty of measurement -- Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995);
- UNI CEI 70098-3:2016 - Errata corrige 1 del 03/05/2018 - Incertezza di misura - parte 3 - Guida all'espressione dell'incertezza di misura;
- EA-4/02:2022 "Expression of the uncertainty of measurement in calibration";
- DT-05-DT- Introduzione ai criteri di valutazione dell'incertezza di misura nelle tarature:
- Beck J. V., Arnold K. J., "Parameter Estimation", Wiley, New York, 1999;
- Taylor J. R., "Introduzione all'analisi degli errori", Zanichelli, 1977;
- DT-0002/6 "Guida al calcolo della ripetibilità di un metodo di prova ed alla sua verifica nel tempo";
- RT-08 "Prescrizioni per l'accreditamento dei laboratori di prova";
  Si rimanda direttamente a questi due ultimi documenti la modalità per il calcolo del limite di ripetibilità di una prova e per i criteri del confronto di esso con l'incertezza estesa di misura della prova.
- RT-25:2 "Prescrizioni per l'accreditamento dei laboratori di taratura".

3. Modalità operative

3.1. Il modello matematico

In un processo di misura il legame tra misurando, o grandezza d'uscita Y, e le N grandezze in ingresso X_i che lo influenzano è in generale esprimibile tramite un modello matematico, descrivibile mediante una rappresentazione funzionale $f(\bullet)$ del tipo

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_N) + \delta \qquad (1)$$

dove la quantità δ, di valore non noto a priori, può essere introdotta per tenere conto del limite intrinseco di incompletezza del modello matematico[1] nella

[1] Dovuto al fatto che il limite a cui può essere spinta la conoscenza di un fenomeno fisico è comunque finito.

rappresentazione del processo di misura, quando vi sia una accertata evidenza (sperimentale, convenzionale, basata sulla memoria storica, sull'esperienza, etc.) della sua importanza.

La relazione funzionale $f(\bullet)$ può essere nota, oppure convenzionalmente accettata, oppure ancora, in particolari situazioni, valutata per approssimazione attraverso uno sviluppo in serie di Taylor generalmente arrestato al primo ordine:

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_NX_N + \delta \qquad \text{con} \qquad a_i = \left.\frac{\Delta Y}{\Delta X_i}\right|_{x_1, x_2, \ldots, x_N} \tag{2}$$

in cui i coefficienti a_i delle X_i sono determinati tramite i rapporti incrementali valutabili attorno al punto di lavoro e la quantità δ tiene conto in questo caso anche del fatto che sono trascurati i termini di ordine superiore.

3.2. Stima delle grandezze in ingresso e del misurando

Il processo di misura può fornire solo una stima y del valore del misurando Y. Questa stima y si ricava a partire dalla (1), utilizzando stime di ingresso x_i per i valori delle N grandezze di ingresso X_i.

La stima di uscita y è quindi data da:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \delta' \tag{3}$$

dove δ' rappresenta la stima di δ.

Le stime in ingresso, a seconda del tipo di grandezza X_i, sono ottenute nei seguenti modi:

- sulla base di distribuzioni di probabilità

  nel caso in cui sia nota la distribuzione di probabilità che descrive la variabilità dei valori attribuibili alla generica grandezza in ingresso X_i, se ne assume come stima x_i la quantità:

$$x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,x\,dx \tag{4}$$

dove $p(x)$ rappresenta la funzione di densità di probabilità[2] associata alla distribuzione della grandezza in ingresso X_i;

- sulla base di processi di misure ripetute

  nel caso di misure indipendenti effettuate tutte nelle stesse condizioni operative (stesso strumento, parametri d'influenza controllati, etc.) si può assumere come migliore stima della grandezza in ingresso la media campionaria:

$$x_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} \tag{5}$$

  dove n rappresenta il numero di valori sperimentali $x_{i,k}$ della i-esima grandezza in ingresso X_i;

- come valore di una singola misura;
- come valore derivante dall'esperienza;
- come valore tabulato (fornito o convenzionalmente accettato);

Per quanto riguarda la quantità δ, quando debba essere introdotta, alla sua stima δ' spesso può essere attribuito un valore nullo ma ad essa deve essere comunque associato, a cura dell'operatore, un'incertezza a livello di scarto tipo.

3.3. Determinazione dell'incertezza tipo composta

L'incertezza tipo composta $u_c(y)$ è determinata a partire dalla legge di propagazione dell'incertezza mediante l'espressione:

[2] La funzione di densità di probabilità $p(x)$ è la derivata, quando esiste, della funzione cumulativa $P(x) = \Pr(\alpha \leq x)$, la quale fornisce, per ogni valore di x, la probabilità che la variabile casuale α sia minore o uguale a x. Per il significato intrinseco di probabilità si ha che: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)} \qquad (6)$$

dove $u(x_i)$ e $u(x_j)$ rappresentano le incertezze tipo associate alle stime delle grandezze in ingresso X_i e X_j, le derivate parziali rappresentano i relativi coefficienti di sensibilità, indicati spesso anche con c_i, calcolati nel punto di lavoro, ovvero in corrispondenza dei valori stimati x_1, x_2, …, x_N e $u(x_i, x_j)$ è la covarianza stimata associata a x_i e x_j.

Spesso si indica con $u_i(y)$ il prodotto tra il coefficiente di sensibilità e l'incertezza tipo relativi alla grandezza X_i

$$c_i\, u(x_i) = u_i(y) \qquad (7)$$

Alternativamente, la (6) può essere scritta nella forma:

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j)} \qquad (8)$$

dove $r(x_i, x_j)$ rappresenta il coefficiente di correlazione, definito come:

$$r(x_i,x_j)=\frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \qquad -1\le r(x_i,x_j)\le 1 \qquad (9)$$

In generale per la stima del misurando e dell'incertezza tipo composta è utile predisporre una tabella come quella sotto riportata in cui sono chiaramente evidenziati tutti i contributi per la stima di $u_c(y)$:

GRANDEZZA X_i	STIMA x_i	INCERTEZZA TIPO $u(x_i)$	COEFFICIENTE DI SENSIBILITA' c_i	COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE $r(x_i, x_j)$	CONTRIBUTO ALLA INCERTEZZA TIPO $u_i(y)$
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1		$u_1(y)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2		$u_2(y)$
…	…	…	…		…
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N		$u_N(y)$
				$r(x_1, x_2)$	$2\, u_1(y)\, u_2(y)\, r(x_1, x_2)$
				…	…
				$r(x_1, x_N)$	$2\, u_1(y)\, u_N(y)\, r(x_1, x_N)$
				$r(x_2, x_3)$	$2\, u_2(y)\, u_3(y)\, r(x_2, x_3)$
				$r(x_2, x_N)$	$2\, u_2(y)\, u_N(y)\, r(x_2, x_N)$
				…	…
				$r(x_{N-1}, x_N)$	$2\, u_{N-1}(y)\, u_N(y)\, r(x_{N-1}, x_N)$
Y	y				$u_c(y)$

Tab. 1

3.4. Valutazione di categoria A e di categoria B delle incertezze tipo associate alle grandezze in ingresso

La valutazione delle incertezza nella stima della generica grandezza X_i può essere condotta attraverso due modalità, dette rispettivamente di categoria A e di categoria B.

3.4.1. Valutazione di categoria A

Il metodo di valutazione di categoria A dell'incertezza tipo è basato sull'analisi statistica di una serie di *n* osservazioni indipendenti della grandezza in ingresso eseguite nelle stesse condizioni operative (stesso strumento, parametri d'influenza controllati, etc.).

L'incertezza tipo $u(x_i)$ associata alla stima x_i delle *n* misure della grandezza in ingresso X_i è rappresentata dal seguente scarto tipo sperimentale:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2} \qquad (10)$$

a cui si devono associare $\nu = n - 1$ gradi di libertà (numero di misure indipendenti).

La (10) può essere convenientemente utilizzata qualora si abbia un numero di misure $n \geq 10$, ovvero almeno 9 gradi di libertà. Nel caso in cui si voglia comunque utilizzarla anche per $n < 10$, occorre fare attenzione a quanto specificato in seguito nel § 3.6 a proposito della valutazione dell'incertezza estesa.

In presenza di una serie storica di misure relative alla grandezza si può utilizzare una stima della varianza cumulata per caratterizzare la dispersione della misura e aumentare sensibilmente i gradi di libertà. Quindi in tale situazione, nei casi in cui la stima della grandezza in ingresso X_i viene determinata tramite la media campionaria di un piccolo numero *n* di osservazioni indipendenti, l'incertezza tipo può essere stimata come

$$u(x_i) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} \qquad (11)$$

dove con s_p si indica lo scarto tipo cumulato come radice quadrata della varianza cumulata

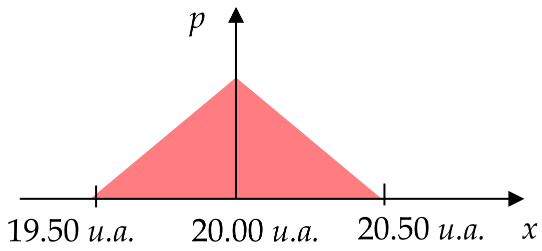
$$s_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{m} \nu_i}} \qquad (12)$$

dove *m* è il numero di cicli di misure ripetute che caratterizzano lo storico, mentre s_i rappresenta lo scarto tipo sperimentale associato al generico ciclo *i*-esimo e ν_i il rispettivo numero di gradi di libertà (numero di misure indipendenti del ciclo di misura *i*-esimo).

Si possono verificare situazioni in cui si può ritenere di conoscere a priori la distribuzione continua di probabilità che descrive la variabilità dei valori sperimentali di misura della grandezza in ingresso X_i. Le conoscenze pregresse si possono fondare sull'esperienza o su di uno storico relativo alla misura, se disponibile e affidabile, o ancora sulla base di dati riportati in letteratura. E' comunque responsabilità dell'operatore assumere nella valutazione dei parametri della distribuzione un criterio che sia sufficientemente cautelativo, in modo da eventualmente sovrastimare, e mai sottostimare, l'incertezza tipo[3]. Quest'ultima è poi calcolata come la radice quadrata (positiva) della varianza associata alla distribuzione ipotizzata.

In questo caso è necessario eseguire comunque un numero anche ridotto di misure ($3 \le n < 10$), al fine di verificare che anche le nuove misure siano in accordo con il comportamento atteso sulla base delle conoscenze pregresse. Inoltre sulla base di tali misure è possibile ottenere la stima x_i come media campionaria.

Supponiamo a titolo di esempio che le conoscenze pregresse ci permettano di stabilire che la variabilità dei valori sperimentali di misura della grandezza in ingresso X_i sia descritta da una distribuzione triangolare come quella sotto riportata:



Supponiamo poi che vengano eseguite 3 misure sperimentali con valori rilevati rispettivamente pari a

$$x_{i,1} = 20.23\ u.a.,\quad x_{i,2} = 20.33\ u.a.,\quad x_{i,3} = 19.87\ u.a.$$

In tale situazione le misure eseguite sono compatibili con la distribuzione di probabilità precedentemente valutata. Si assume quindi come stima della grandezza in ingresso la media campionaria

$$x_i = \frac{20.23 + 20.33 + 19.87}{3} = 20.14\ u.a.$$

L'incertezza tipo associata alla suddetta stima viene determinata invece come radice quadrata della varianza associata alla distribuzione (vedi § 3.4.3.)

$$u(x_i) = \frac{0.50}{\sqrt{6}} = 0.20\ u.a.$$

3.4.2 Valutazione di categoria B

[3] Si osservi che questo modo di procedere porta ad una valutazione di categoria B dell'incertezza tipo.

La valutazione di categoria B dell'incertezza tipo si fonda sulla base di un giudizio scientifico di tutte le informazioni utili sulla possibile variabilità di X_i.

Le informazioni per la stima di incertezze tipo $u(x_i)$ che rientrano propriamente in questa categoria possono derivare da:

- dati di misure precedenti;
- esperienza o conoscenza generale del comportamento e delle proprietà di materiali o strumenti di interesse;
- specifiche tecniche del costruttore;
- dati forniti da certificati di taratura o di altro genere;
- valori di riferimento presi da manuali o dalla letteratura.

Sulla base delle suddette informazioni, qualora la stima dell'incertezza tipo $u(x_i)$ non sia direttamente fornita, occorre valutarla assumendo per la stima della grandezza in ingresso X_i una distribuzione di probabilità basata sulla teoria o sull'esperienza. L'incertezza tipo è poi calcolata come la radice quadrata della varianza associata a tale distribuzione.

3.4.3 Distribuzioni di probabilità e incertezze tipo

Sono di seguito riportate le distribuzioni di probabilità di uso più comune nei processi di misura e i valori di incertezza tipo $u(x_i)$, calcolati come radice quadrata della varianza[4] ad esse associata:

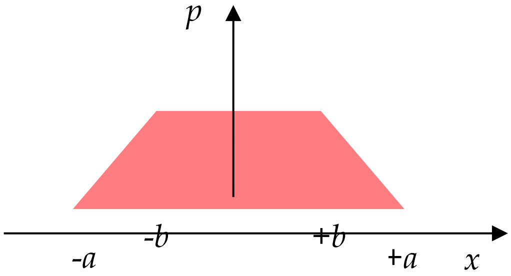
- distribuzione trapezoidale

[4] In generale la varianza σ^2 è così definita:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - \bar{x})^2 \, dx$$

dove $p(x)$ rappresenta la funzione densità di probabilità della distribuzione e $\bar{x}$ il valore medio.

$$u(x_i) = \frac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{6}} \qquad (13)$$



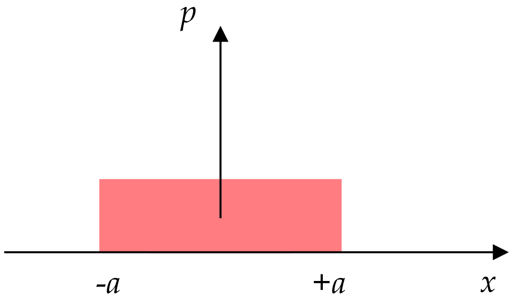
$2b = 2a$ß

$0 \leq \beta \leq 1$

ß parametro indicante il rapporto tra base minore e base maggiore del trapezio.

Casi particolari:

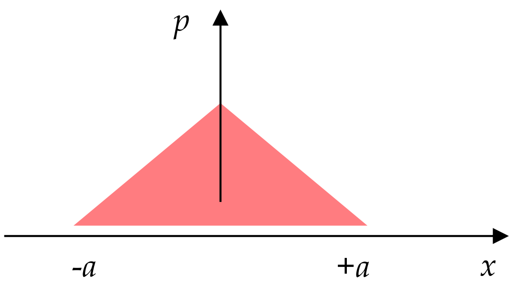
- distribuzione rettangolare



ß = 1

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad (14)$$

- distribuzione triangolare



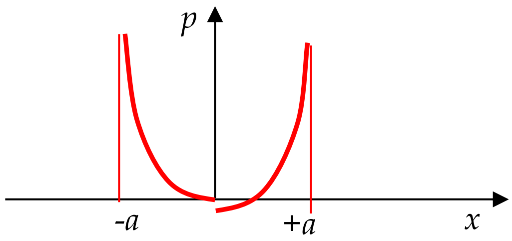
ß = 0

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \qquad (15)$$

Questi tipi di distribuzioni possono essere adottati nel caso in cui i valori assunti da una determinata grandezza in ingresso X_i siano più probabili attorno alla media. La distribuzione rettangolare corrisponde ad una ipotesi di probabilità uniforme in un definito intervallo[5]. Qualora si ritenesse opportuno non avere delle brusche variazioni agli estremi, ovvero non avere discontinuità nella $p(x)$, può essere ipotizzabile una distribuzione trapezoidale oppure una distribuzione triangolare.

- distribuzione ad U

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{16}$$



$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Tale distribuzione può essere adottata nel caso in cui i valori assunti da una determinata grandezza in ingresso X_i siano più probabili agli estremi di un intervallo. Essa bene si adatta, ad esempio, a descrivere la variabilità dei valori di misura proposti da uno strumento di classe assegnata "*a*".

3.5 Correlazioni tra le grandezze in ingresso

Due o più grandezze in ingresso si dicono correlate quando non sono tra loro statisticamente indipendenti, ovvero si ha in qualche modo una mutua dipendenza.

Nel caso di grandezze correlate, è necessario considerare la legge di propagazione dell'incertezza nella sua espressione generale definita dalla (6) del § 3.3.

Qualora siano presenti e significative, le correlazioni tra grandezze d'ingresso non possono essere ignorate.

Si procede ora ad illustrare alcuni casi in cui si debba stimare la covarianza o in alternativa il coefficiente di correlazione tra grandezze in un processo di stima dell'incertezza di misura.

Valutazione di categoria A della covarianza (covarianza sperimentale)

[5] Per esempio essa descrive il processo di quantizzazione dovuto al limite di risoluzione introdotto dall'unità di formato pari a $2a$ di uno strumento.

Qualora si disponga di determinazioni sperimentali delle grandezze X_i e X_j tra loro correlate, è possibile stimare la covarianza sperimentale associata alle loro stime (medie campionarie) x_i e x_j tramite la seguente espressione

$$u(x_i, x_j) = \mathrm{cov}(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)(x_{j,k} - x_j) \tag{18}$$

Valutazione di categoria B della covarianza

E' possibile in alcuni casi utilizzare l'insieme d'informazioni disponibili sulla variabilità correlata di più grandezze per stimare la covarianza (valutazione di categoria B).

Per esempio, si consideri il caso in cui si utilizzino, in un processo di misura, le informazioni relative alle correzioni da apportare a due letture l_1 e l_2 eseguite con lo stesso strumento. Si supponga che le due letture siano relative a misure di due differenti valori della grandezza in ingresso e che le correzioni c_1 e c_2 siano deducibili dall'equazione di taratura (vedi § 3.8.) dello strumento.

L'equazione di taratura sia espressa come equazione lineare del tipo $c = al+b$, in cui ai coefficienti a e b sono associate le incertezze a livello di scarto tipo $u(a)$ e $u(b)$ rispettivamente.

A partire dalla sua definizione, è possibile ricavare la covarianza tra i valori di correzione secondo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(c_1, c_2) = E[(c_1 - \bar{c}_1)(c_2 - \bar{c}_2)] = \\
&= E\{[(al_1 + b) - (\bar{a}l_1 + \bar{b})][(al_2 + b) - (\bar{a}l_2 + \bar{b})]\} = \\
&= E\{[l_1(a - \bar{a}) + b - \bar{b}][l_2(a - \bar{a}) + b - \bar{b}]\} = \\
&= E\left[l_1 l_2 (a - \bar{a})^2 + (b - \bar{b})^2 + (l_1 + l_2)(a - \bar{a})(b - \bar{b})\right] = \\
&= l_1 l_2 u^2(a) + u^2(b) + (l_1 + l_2)\,\mathrm{cov}(a, b)
\end{aligned} \tag{19}$$

dove $E(\cdot)$ indica il valore atteso della grandezza $(\cdot)$, mentre le variabili soprassegnate $(\bar{a}, \bar{b}, \ldots)$ indicano il valore medio (di a, b, …).

I precedenti passaggi sono giustificati dalla proprietà di linearità del valore atteso e dal fatto che, per definizione, si ha

$$u^2(a) = E[(a - \bar{a})^2] \qquad u^2(b) = E[(b - \bar{b})^2]$$

$$E[a] = \bar{a} \qquad E[b] = \bar{b} \qquad E[ab] = \bar{a}\bar{b} + \mathrm{cov}(a, b)$$

Coefficiente di correlazione

Nei casi in cui non si abbiano dati sperimentali diretti o indiretti per potere costruire una stima della covarianza, è possibile effettuare una stima del coefficiente di correlazione.

La stima può essere determinata sperimentalmente osservando che, se una variazione δ_i in x_i produce una variazione δ_j in x_j, il coefficiente di correlazione associato a x_i e x_j può essere stimato dalla seguente relazione

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i)\delta_j}{u(x_j)\delta_i} \qquad (20)$$

In alcune situazioni il coefficiente di correlazione può essere stimato sulla base dell'esperienza, della conoscenza di particolari leggi fisiche, etc.. In questo caso, particolare attenzione va posta all'individuazione del segno corretto da attribuire al coefficiente.

Si supponga di eseguire con lo stesso strumento misure non ripetute di due grandezze in ingresso X_1 e X_2 omologhe, aventi praticamente lo stesso valore. Tali grandezze risultano essere tra loro correlate e il coefficiente di correlazione viene stimato di segno positivo in quanto gli scostamenti sono nello stesso verso, sia esso per difetto o per eccesso. Per quanto riguarda invece la stima del modulo del coefficiente di correlazione, questa può essere determinata partendo dal presupposto generale che risulti tanto più prossima all'unità (massima correlazione) quanto più siano prossime le stime delle grandezze correlate.

E' importante notare come il segno del coefficiente di correlazione non dia alcuna informazione a proposito di un aumento o di una diminuzione dell'incertezza tipo composta per la presenza del contributo legato alla correlazione di tutte o alcune delle grandezze in ingresso; ciò è dovuto al fatto che nella legge di propagazione dell'incertezza di misura il segno dei contributi di correlazione dipende, oltre che dal coefficiente di correlazione, anche dai coefficienti di sensibilità relativi alle grandezze in ingresso.

3.6 Incertezza estesa

La determinazione del valore dell'incertezza estesa $U(y)$ si ottiene moltiplicando l'incertezza tipo composta $u_c(y)$ per il fattore di copertura k:

$$U(y) = ku_c(y) \qquad (21)$$

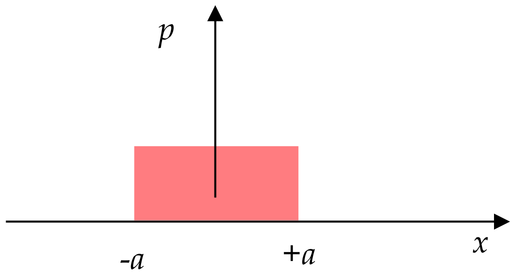
Per determinare il fattore di copertura k occorre, sulla base della distribuzione di y, definire un livello di confidenza in termini di probabilità percentuale. La distribuzione di y può essere valutata a partire dalle distribuzioni delle stime in ingresso.

In assenza di contributi di incertezza di categoria A stimati sulla base di un numero di osservazioni inferiore a 10 e in presenza di 3 o più contributi di incertezza dello stesso ordine di grandezza si può assumere per y una distribuzione normale. Ciò vale anche nel caso in cui vi siano meno di tre contributi differenti di incertezza, ma almeno uno di essi sia caratterizzato da una distribuzione normale[6]. In questa situazione, considerando un livello di confidenza pari al 95.45%, il fattore di copertura *k* assume valore 2. Nella sottostante tabella sono riportati i valori del fattore di copertura *k*, corrispondenti a diversi livelli di confidenza, sempre nel caso di distribuzione normale di *y*:

LIVELLO DI CONFIDENZA	FATTORE DI COPERTURA
68.27	1
90	1.645
95	1.960
95.45	2
98.36	2.4
99	2.576
99.73	3

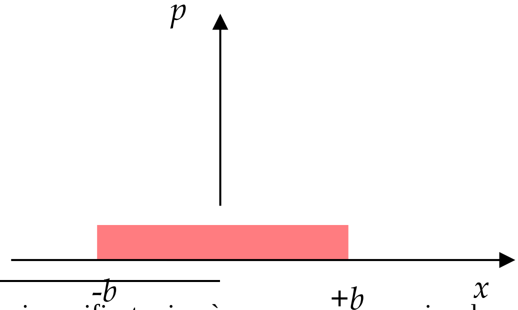
Nel caso in cui non si possa assumere una distribuzione risultante di tipo normale, occorre determinare la convoluzione[7] delle distribuzioni associate alle grandezze in ingresso e calcolare poi il fattore di copertura *k* corrispondente al livello di confidenza voluto.

Esempio



La convoluzione di due distribuzioni rettangolari di semiampiezza *a* e *b* (con $a < b$) fornisce come risultato una distribuzione trapezoidale.

$$u(y) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{3}} \qquad \text{(E1.1)}$$



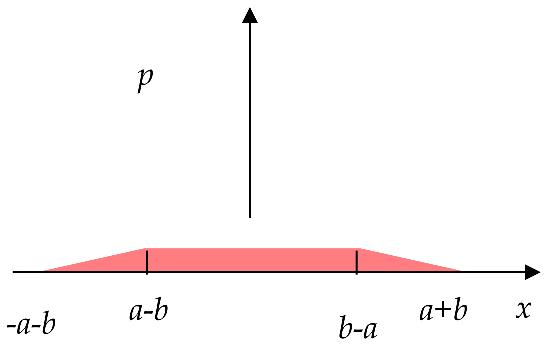
Per avere un livello di confidenza del 95% deve essere

[6] Nelle condizioni specificate si può assumere convenzionalmente che la convoluzione di un numero di distribuzioni pari almeno a 3 sia assimilabile ad una distribuzione normale e così pure la convoluzione di 2 distribuzioni se è normale almeno una di esse.

[7] In generale, date due funzioni $g(x)$ e $h(x)$, la loro convoluzione è una funzione $f(x)$ così definita:

$$f(x) = g(x) * h(x) = h(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)h(x-\tau)d\tau$$

$$k = \sqrt{\frac{ab}{5}} \qquad \text{(E1.2)}$$



Se nella determinazione dell'incertezza tipo composta è presente una valutazione di categoria A dell'incertezza tipo stimata mediante lo scarto tipo sperimentale della media con un numero di misure indipendenti inferiore a 10, allora si assume per la stima del misurando una distribuzione t-Student e si deve calcolare il numero di gradi di libertà effettivi ν_{eff} mediante la formula di Welch – Satterthwaite:

$$\upsilon_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\upsilon_i}} \qquad (22)$$

dove ν_i è il numero di gradi di libertà[8] associato a $u(x_i)$.

Nella sottostante tabella sono riportati i valori da adottare per il fattore di copertura k, corrispondenti a diversi livelli di confidenza e a diversi numeri di gradi di libertà effettivi[9].

	LIVELLO DI CONFIDENZA IN TERMINI DI PROBABILITA' PERCENTUALE

[8] Per distribuzioni di probabilità assegnate e certe, si assume $\nu_i = \infty$.
[9] I valori 68.27%, 95.45% e 99.73%, in corrispondenza di infiniti gradi di libertà, portano a valori di k rispettivamente uguali a 1, 2 e 3, come avviene nel caso della distribuzione normale.

GRADI DI LIBERTA' ν_{eff}	68.27	90	95	95.45	99	99.73
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.02	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

3.7 Tarature

Il procedimento di taratura, basato sul confronto tra due dispositivi di misura, uno dei quali è quello in taratura e l'altro è quello di riferimento, può essere formalizzato, dal punto di vista del modello matematico, dalla seguente espressione

$$C = f\left(X_{Camp}, X_{Strum}\right) \tag{23}$$

in cui C rappresenta il risultato del confronto, attraverso una procedura assegnata, tra le due grandezze in ingresso, X_{Camp} proposta dallo strumento di riferimento e X_{Strum} proposta da quello in taratura.
La relazione funzionale $f(\bullet)$ è spesso rappresentata dalla espressione

$$C = X_{Camp} - X_{Strum} \tag{24}$$

dove C è in questo caso una grandezza omologa a quelle di ingresso e rappresentante la correzione da apportare allo strumento in taratura.

In altri casi la relazione funzionale $f(\bullet)$ è espressa in termini di rapporto

$$C = \frac{X_{Camp}}{X_{Strum}} \tag{25}$$

in questo caso le grandezze in ingresso possono essere anche non omologhe e C rappresenta il fattore correttivo da applicare allo strumento in taratura.

Attraverso i procedimenti descritti nei paragrafi precedenti, è possibile determinare una stima c del misurando C, sulla base delle stime x_{Camp} e x_{Strum} delle grandezze in ingresso.

$$c = f\left(x_{Camp}, x_{Strum}\right) \tag{26}$$

e l'incertezza ad essa associata sulla base delle incertezze tipo $u(x_{Camp})$ e $u(x_{Strum})$.

In particolare si ottiene quindi:

$$c = x_{Camp} - x_{Strum} \tag{27}$$

$$u_c(c) = \sqrt{u^2(x_{Camp}) + u^2(x_{Strum})} \tag{28}$$

per un modello in cui il misurando C è rappresentato dalla correzione.

Mentre è:

$$c = \frac{x_{Camp}}{x_{Strum}} \tag{29}$$

$$u_c(c) = \sqrt{\left(\frac{1}{x_{Strum}}\right)^2 u^2(x_{Camp}) + \left(-\frac{x_{Camp}}{x_{Strum}^2}\right)^2 u^2(x_{Strum})} \tag{30}$$

per un modello in cui il misurando C è rappresentato dal fattore correttivo.

Si noti che entrambe le grandezze in ingresso possono essere funzione di altre grandezze, in base alla complessità della catena metrologica relativa al processo di taratura in oggetto. In genere i contributi di incertezza tipo comuni a tutte le grandezze misurate derivano dal certificato di taratura e dalla deriva nel tempo per ciò che riguarda il campione di riferimento, mentre per lo strumento in taratura sono legati alla risoluzione strumentale e alla ripetibilità delle misure. Ovviamente oltre a questi termini di incertezza se ne possono presentare altri, in relazione alla specifica misura e agli strumenti utilizzati, quali per esempio, l'isteresi strumentale, la dipendenza da parametri d'influenza, etc..

La stima del misurando C e dell'incertezza ad essa associata può essere eseguita in corrispondenza a uno o più valori della grandezza di riferimento X_{Camp} in un assegnato intervallo di taratura. La scelta del numero di punti di taratura e della loro distribuzione deve essere sempre definita nella specifica procedura di taratura.

In alcuni casi, può essere espressamente richiesto di fornire un'equazione di taratura, ovvero una espressione analitica in grado di esprimere la stima di c e la relativa incertezza su tutto l'intervallo di taratura o su di una sua parte. In questo caso si possono utilizzare metodi di interpolazione quali quelli descritti nel § 3.8..

Nei certificati di taratura il risultato di una misura deve essere costituito dalla stima c del misurando e dall'incertezza estesa U ad essa associata e deve essere espresso nella forma $(c \pm U)$. A ciò si deve aggiungere una nota esplicativa[10] che nel caso generale può avere la seguente formulazione:

"L'incertezza estesa indicata è espressa come l'incertezza tipo moltiplicata per il fattore di copertura $k = 2$, che per una distribuzione normale corrisponde ad una probabilità di copertura del 95% circa. L'incertezza tipo è stata determinata conformemente al documento EA-4/02".

Tuttavia, nei casi in cui si siano dovuti calcolare i gradi di libertà effettivi υ_{eff}, la nota addizionale deve essere la seguente:

"L'incertezza estesa indicata è espressa come l'incertezza tipo moltiplicata per il fattore di copertura $k = XX$, che per una distribuzione con gradi di libertà effettivi $\upsilon_{eff} = YY$ corrisponde ad una probabilità di copertura del 95% circa. L'incertezza tipo è stata determinata conformemente al documento EA-4/02".

Il valore numerico dell'incertezza estesa deve essere espresso al massimo con due cifre significative; se il troncamento riduce il valore numerico dell'incertezza di più del 5% si deve usare il valore arrotondato per eccesso. Normalmente, nella sua espressione finale, il valore numerico della stima del misurando deve essere arrotondato all'ultima cifra significativa del valore dell'incertezza estesa[11].

Se ad esempio dal processo di taratura si ottiene

$$c = 4.867\ u.a. \qquad u_c(c) = 0.373\ u.a. \qquad \text{con} \quad k = 2$$

l'espressione del risultato di misura diventa[12]

$$(4.87 \pm 0.74)\ u.a.$$

[10] Nel caso in cui la distribuzione caratterizzante la dispersione dei possibili valori del misurando possa essere determinata in modo diretto, attraverso processi di convoluzione (vedi esempio § 3.6.), nel certificato di taratura deve essere inserita la distribuzione risultante, specificando il valore del fattore di copertura corrispondente ad un intervallo di confidenza del 95% circa.

[11] Tali regole sono valide anche per le attività sperimentali di prova e ad esse si applicano in maniera eguale.

[12] Troncamento dell'incertezza estesa alla seconda cifra significativa e arrotondamento alla seconda cifra significativa del misurando.

Nel caso in cui si abbia

$$c = 2.733\ u.a. \qquad u_c(c) = 0.053\ u.a. \qquad \text{con} \quad k = 2$$

l'espressione del risultato di misura diventa[13]

$$(2.73 \pm 0.11)\ u.a.$$

Occorre sottolineare che nell'ambito dell'utilizzo delle informazioni contenute nel certificato di taratura, è possibile non applicare la correzione o il fattore correttivo alla lettura dello strumento, tenendo conto dell'effetto sistematico allargando cautelativamente l'incertezza associata al risultato della misura, ovvero sostituendo U con $(U + |c|)$. Questo metodo può essere convenientemente utilizzato da parte di coloro che usufruiscono dei dati di taratura per un uso applicativo dello strumento, mentre non deve essere utilizzato nell'ambito dell'esecuzione di una taratura, in particolare quindi da parte di un laboratorio di taratura.

3.7.1 Esempio

Si supponga di eseguire una taratura per confronto in corrispondenza di un punto di taratura di valore nominale pari a 10.0 *u.a.* (unità arbitrarie). Lo strumento in taratura ed lo strumento campione vengono eccitati dalla stessa sorgente, le cui caratteristiche non garantiscono un'adeguata stabilità del valore della grandezza generata nell'arco di tempo richiesto per completare le operazioni di misura. Per questo motivo, le letture dei due strumenti vengono effettuate simultaneamente, in modo da poter confrontare le misure proposte dai due strumenti in corrispondenza dello stesso valore della grandezza d'ingresso.

Si assume inoltre l'ipotesi che la taratura avvenga in condizioni ambientali tali da rendere trascurabili gli effetti delle grandezze d'influenza sulla taratura stessa.

Lo strumento campione è dotato di certificato di taratura, rilasciato in data anteriore di tre mesi rispetto a quella d'esecuzione della taratura in oggetto. Dal certificato, si ricava che, in corrispondenza ad una lettura di 10.00 *u.a.*[14] deve essere applicata una

[13] Arrotondamento per eccesso dell'incertezza estesa alla seconda cifra significativa e arrotondamento alla seconda cifra significativa del misurando.

[14] Qualora il certificato di taratura non fornisca i suddetti dati in prossimità del punto di taratura, occorre ottenere le informazioni mediante opportune tecniche di interpolazione, volte alla determinazione di un'equazione di taratura in grado di dare indicazioni sui valori di correzione e incertezza estesa su tutto l'intervallo di taratura o su di una sua parte (vedi § 3.8.).

correzione di +0.10 *u.a.* e la relativa incertezza estesa è 0.10 *u.a.*, specificata con un livello di confidenza di 95.45% e con 9 gradi di libertà.

Dal manuale dello strumento si ricava inoltre che le sue caratteristiche sono soggette a variazione nel tempo. In particolare lo strumento non mostra effetti di derive sistematiche, ma la sua incertezza di misura cresce nel tempo, con un incremento stimato in 0.02 *u.a.* per mese (a livello di scarto tipo). Anche a questa stima sono associati 9 gradi di libertà.

Lo strumento in taratura è invece caratterizzato da un'unità di formato pari a 0.1 *u.a.*

Vengono effettuate 10 coppie di misure, riportate nella seguente tabella:

Strumento campione[15]	Strumento in taratura
10.55 *u.a.*	10.0 *u.a.*
10.60 *u.a.*	10.1 *u.a.*
10.45 *u.a.*	10.2 *u.a.*
10.25 *u.a.*	10.0 *u.a.*
10.20 *u.a.*	10.0 *u.a.*
10.60 *u.a.*	10.2 *u.a.*
10.50 *u.a.*	10.4 *u.a.*
10.45 *u.a.*	10.7 *u.a.*
10.15 *u.a.*	10.1 *u.a.*
10.25 *u.a.*	10.3 *u.a.*

Modello matematico

Consideriamo il modello matematico secondo cui il misurando C rappresenta la correzione da apportare allo strumento in taratura:

$$C = X_{Camp} - X_{Strum} \qquad \text{(E2.1)}$$

dove X_{Camp} è il valore della grandezza dal campione di riferimento e X_{Strum} è quello fornito dallo strumento in taratura.

[15] Si noti che tali valori sono quelli misurati dallo strumento campione e quindi prima del loro utilizzo devono essere corretti secondo le indicazioni fornite dal certificato di taratura del campione stesso.

Stima del misurando

La stima c della correzione C si ottiene calcolando la relazione (E2.1), in corrispondenza delle stime x_{Camp} e x_{Strum} delle grandezze in ingresso:

$$x_{Camp} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_{Camp,k} = 10.50\,u.a. \qquad \text{(E2.2)}$$

$$x_{Strum} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_{Strum,k} = 10.20\,u.a. \qquad \text{(E2.3)}$$

dove $x_{Camp,k}$ sono i valori delle k-esime misure ripetute eseguite con il campione di riferimento e corrette secondo quanto riportato nel certificato di taratura e $x_{Strum,k}$ sono i valori delle k-esime misure ripetute eseguite tramite lo strumento in taratura.

Si ha quindi:

$$c = x_{Camp} - x_{Strum} = 0.30\,u.a. \qquad \text{(E2.4)}$$

Incertezza tipo composta

L'incertezza tipo composta associata alla stima del misurando si determina applicando la legge di propagazione dell'incertezza, noti i contributi di incertezza tipo delle stime delle grandezze in ingresso:

$$u_c(c) = \sqrt{(1)^2 u^2(x_{Camp}) + (-1)^2 u^2(x_{Strum})} = \sqrt{u^2(x_{Camp}) + u^2(x_{Strum})} \qquad \text{(E2.5)}$$

Per lo strumento campione si hanno due contributi: quello relativo alla taratura $u_{cert}(x_{Camp})$ e quello relativo all'instabilità temporale $u_{stab}(x_{Camp})$, entrambi stimati con una valutazione di categoria B dell'incertezza[16]:

$$u_{cert}(x_{Camp}) = \frac{U_{Cert}}{k} = \frac{U_{Cert}}{2.32} = 0.0431\, u.a. \tag{E2.6}$$

$$u_{stab}(x_{Camp}) = n°mesi * derivamensile = 3 \cdot (0.02\, u.a.) = 0.06\, u.a. \tag{E2.7}$$

$$u(x_{Camp}) = \sqrt{u_{cert}^2(x_{Camp}) + u_{stab}^2(x_{Camp})} = 0.0738\, u.a. \tag{E2.8}$$

Per quanto riguarda lo strumento da tarare, le componenti di incertezza sono le seguenti.

- $u_{lett}(x_{Strum})$, relativa all'unità di formato dello strumento e che viene valutata mediante un processo di categoria B, assumendo una distribuzione rettangolare di ampiezza pari all'unità di formato ($U.F.$) e attribuendo infiniti gradi di libertà alla stima:

$$u_{lett}(x_{Strum}) = \frac{U.F.}{2\sqrt{3}} = 0.0289\, u.a. \tag{E2.9}$$

- $u_{rip}(x_{Strum})$, relativa alla ripetibilità della misura fornita dallo strumento e che viene valutata mediante un processo di categoria A come scarto tipo campionario della media degli scostamenti[17] tra le misure ripetute rilevate con il campione e quelle tramite lo strumento in taratura:

$$u_{rip}(x_{Strum}) = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)}\sum_{k=1}^{10}\left[\left(x_{Camp,k} - x_{Strum,k}\right) - \left(x_{Camp} - x_{Strum}\right)\right]^2} = 0.0785\, u.a. \tag{E2.10}$$

A questa stima sono associati 9 gradi di libertà.

[16] Si noti che per lo strumento campione non viene considerata l'incertezza legata alla sua unità di formato in quanto la si considera già inclusa nell'incertezza composta dichiarata nel certificato di taratura.
[17] In questo modo si attribuisce allo strumento anche l'eventuale instabilità a breve termine dello strumento campione, ma si escludono virtualmente gli effetti della non stabilità della sorgente: si noti inoltre che in questo modo si evita di introdurre la covarianza $u(x_{Camp}, x_{Strum})$.

Quindi

$$u(x_{Strum}) = \sqrt{u_{lett}^2(x_{Strum}) + u_{rip}^2(x_{Strum})} = 0.0837\,u.a. \qquad \text{(E2.11)}$$

E' ora possibile determinare l'incertezza composta. Non essendovi correlazioni tra le grandezze in ingresso ed essendo unitari tutti i coefficienti di sensibilità, si ottiene quindi:

$$u_c(c) = \sqrt{u^2(x_{Camp}) + u^2(x_{Strum})} = 0.1116\,u.a. \qquad \text{(E2.12)}$$

Si riassume nella sottostante tabella il processo per la stima dell'incertezza tipo composta associata alla stima *c* del misurando:

GRANDEZZA	***STIMA***	**INCERTEZZA TIPO**	**COEFFICIENTE DI SENSIBILITA'**	**CONTRIBUTO ALLA INCERTEZZA TIPO**
X_{Camp}	10.50	0.0738	1	0.0738
X_{Strum}	10.20	0.0837	-1	-0.0837
C	0.30			$u_c(c)$ = 0.1116

Incertezza estesa

Essendo normale la distribuzione associata alla stima *c* del misurando, considerando un livello di confidenza del 95.45%, si passa dall'incertezza tipo composta a quella estesa moltiplicando[18] per un fattore di copertura $k = 2$ ([19]).

$U(c) = 2\,u_c(c) = 0.22\,u.a.$ (E2.13)

Gradi di libertà effettivi

[18] Per i decimali da tenere in considerazione si utilizzano le indicazioni generali fornite nel § 3.7.
[19] In questo caso si può adottare un fattore di copertura pari a due in quanto l'incertezza composta deriva dalla combinazione di più contributi di incertezza ottenuti mediante valutazioni di categoria B e da un termine di incertezza stimato mediante una valutazione di tipo A, con nove gradi di libertà (si veda il § 3.6).

Supponiamo ora di avere a disposizione solamente 3 misure ripetute:

Strumento campione	Strumento in taratura
10.55 *u.a.*	10.0 *u.a.*
10.60 *u.a.*	10.1 *u.a.*
10.45 *u.a.*	10.2 *u.a.*

La stima del misurando e dell'incertezza tipo composta ad essa associata si calcolano attraverso le relazioni già utilizzate in precedenza, mentre per la valutazione dell'incertezza estesa devono essere calcolati i gradi di libertà effettivi mediante la formula di Welch–Satterthwaite.

Stima delle grandezze in ingresso e del misurando

$$x_{Camp} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_{Camp,k} = 10.63\,u.a. \quad \text{(E2.14)}$$

$$x_{Strum} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_{Strum,k} = 10.10\,u.a. \quad \text{(E2.15)}$$

$$c = x_{Camp} - x_{Strum} = 0.53\,u.a. \quad \text{(E2.16)}$$

L'incertezza tipo composta è stimata mediante la (E.2.5).

Per lo strumento campione si hanno i due medesimi contributi del caso con 10 misure ripetute, legati rispettivamente al certificato di taratura e alla stabilità nel tempo, e definiti dalla (E.2.6) e dalla (E.2.7). Da cui l'incertezza tipo $u(x_{Camp})$ è data dalla (E.2.8).

Per quanto riguarda lo strumento da tarare, la componente di incertezza associata alla risoluzione dello strumento in taratura rimane invariata ed è definita dalla (E.2.9), mentre varia il contributo di ripetibilità:

$$u_{rip}\left(x_{Strum}\right)=\sqrt{\frac{1}{3(3-1)}\sum_{k=1}^{3}\left[\left(x_{Camp,k}-x_{Strum,k}\right)-\left(x_{Camp}-x_{Strum}\right)\right]^2}=0.0298\,u.a. \quad \text{(E2.17)}$$

da cui

$$u\left(x_{Strum}\right)=\sqrt{u_{lett}^2\left(x_{Strum}\right)+u_{rip}^2\left(x_{Strum}\right)}=0.0971\,u.a. \quad \text{(E2.18)}$$

Quindi si ottiene:

$$u_c(c)=\sqrt{u^2\left(x_{Camp}\right)+u^2\left(x_{Strum}\right)}=0.1221\,u.a. \quad \text{(E2.19)}$$

Tabella riassuntiva

GRANDEZZA	***STIMA***	**INCERTEZZA TIPO**	**COEFFICIENTE DI SENSIBILITA'**	**CONTRIBUTO ALLA INCERTEZZA TIPO**
X_{Camp}	10.63	0.0738	1	0.0738
X_{Strum}	10.10	0.0971	-1	-0.0971
C	0.53			$u_c(c)$ = 0.1221

Incertezza estesa

Si assume una distribuzione t-Student per la stima del misurando e il numero dei gradi di libertà effettivi viene stimato mediante la formula di Welch-Satterthwaite, all'interno della quale il numero dei gradi di liberta associati al contributo di incertezza ottenuto mediante valutazione di categoria A è in questo caso pari a 2 (numero di misure ripetute indipendenti), mentre ai contributi di categoria B sono associati infiniti gradi di libertà.

$$\nu_{eff} = \frac{[u_c(c)]^4}{[u_{rip}^4(x_{Strum})/\nu_{rip} + u_{lett}^4(x_{Strum})/\nu_{lett} + u_{cert}^4(x_{Camp})/\nu_{cert} + u_{stab}^4(x_{Camp})/\nu_{stab}]} =$$

$$= \frac{(0.1221)^4}{[(0.0928)^4/2 + (0.0289)^4/\infty + (0.0431)^4/9 + (0.06)^4/9]} = 5 \qquad \text{(E2.20)}$$

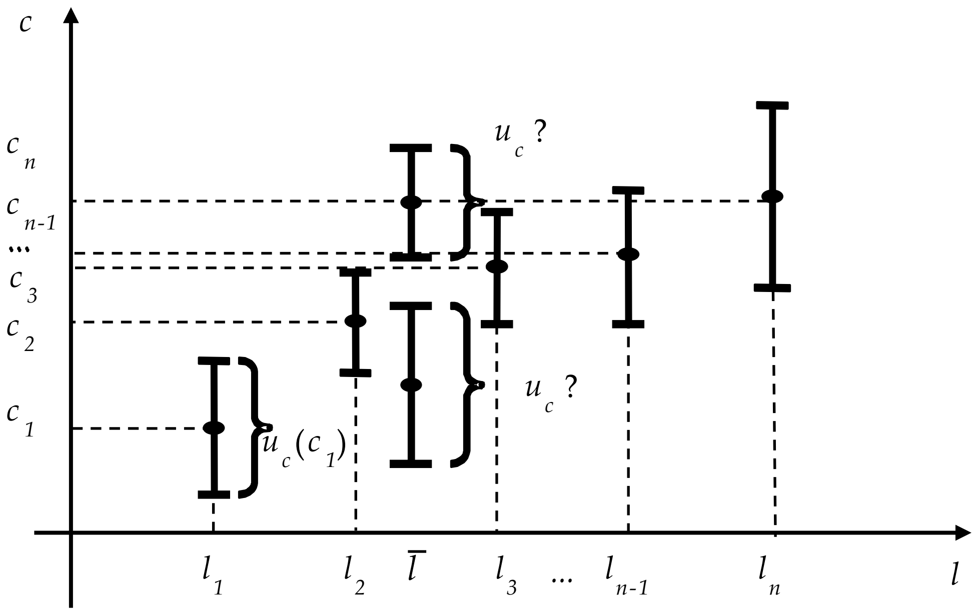
dal numero di gradi di libertà effettivi[20], definito un livello di confidenza del 95.45%, mediante la tabella della distribuzione t-student si ottiene il fattore di copertura k pari a 2.65 da utilizzare per passare all'incertezza estesa

$U(c) = 2.65\ u_c(c) = 0.32\ u.a.$ (E2.21)

[20] Il numero ricavato dalla formula di Welch Satterthwaite sarebbe 5.7091 ma viene conservativamente approssimato per difetto all'intero più prossimo.

3.8 Equazione di taratura e incertezza di interpolazione

Il processo di taratura fornisce, in corrispondenza di ciascun punto di taratura, la stima c della correzione C da applicare allo strumento in taratura e la stima dell'incertezza ad essa associata. Nasce quindi l'esigenza, nei casi in cui si debbano avere informazioni in punti non coincidenti con quelli di taratura, di determinare l'equazione di taratura, ovvero la relazione funzionale in grado di fornire la stima della correzione e dell'incertezza su tutto l'intervallo di taratura o su di una sua parte.



A questo proposito, siano l_1, l_2, ... l_{n-1}, l_n gli n punti di misura e c_1, c_2, ... c_{n-1}, c_n le corrispondenti stime delle correzioni a cui è associata la relativa incertezza tipo composta $u_c(c_i)$, ottenute dal processo di taratura.

Il problema che si pone è quello di stimare il valore di correzione e l'incertezza associata in corrispondenza di un qualsiasi valore $\bar{l}$ letto sullo strumento in taratura.

La soluzione che si adotta è quella basata sull'impiego delle tecniche di interpolazione. Come funzioni interpolanti vengono adottate tipicamente quelle polinomiali e il metodo utilizzato per la determinazione dei coefficienti del polinomio è quello dei minimi quadrati pesati.

Modello matematico

Nel caso di interpolazione polinomiale, la relazione funzionale che lega la lettura l sullo strumento in taratura e la stima della correzione c ad essa associata è espressa da un polinomio interpolante di grado m, a coefficienti costanti a_0, a_1, $\ldots a_m$:

$$c = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + ... + a_m l^m \qquad (31)$$

I coefficienti si ricavano risolvendo un sistema lineare di (m + 1) equazioni nelle (m + 1) incognite a_j, ottenuto imponendo la minimizzazione degli scarti quadratici tra i valori del modello e quelli sperimentali.

Determinazione dell'equazione di taratura

Utilizzando la forma matriciale, si definiscono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & ... & l_1^m \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & l_n & ... & l_n^m \end{bmatrix} \qquad (32)$$

la matrice delle letture A di ordine n x m:

Il vettore delle correzioni c e la relativa matrice di varianza-covarianza V(c)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix} \qquad (33)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} u_c^2(c_1) & u(c_1, c_2) & ... & u(c_1, c_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ u(c_n, c_1) & u(c_n, c_2) & ... & u_c^2(c_n) \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Il vettore delle incognite a

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{35}$$

La soluzione, rappresentata dal vettore $\hat{\mathbf{a}}$,è fornita dall'espressione matriciale

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{c})\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{c})\mathbf{c} \tag{36}$$

e dalla relativa matrice di varianza-covarianza $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}})$

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}) = [\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{c})\mathbf{A}]^{-1} \tag{37}$$

Uso dell'equazione di taratura e adeguatezza del modello matematico

E' possibile ottenere il valore della correzione per qualsiasi punto appartenente all'intervallo di taratura o alla parte di esso su cui è stata ricavata l'equazione di taratura, calcolando il polinomio interpolante in corrispondenza del valore letto $\bar{l}$ dallo strumento in taratura

$$\hat{c} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\bar{l} + \hat{a}_2\bar{l}^2 + \dots + \hat{a}_m\bar{l}^m \tag{38}$$

L'incertezza tipo composta associata è poi ricavata dalla seguente relazione[21]

$$u_c^2(\hat{c}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}^{\mathbf{T}} \tag{39}$$

dove

$$\bar{\mathbf{a}} = [1 \quad \bar{l} \quad \dots \quad \bar{l}^m] \tag{40}$$

L'equazione di taratura ottenuta è realmente rappresentativa del comportamento dello strumento se e solo se il modello matematico secondo il quale essa è stata dedotta sia adeguato e garantisca quindi una attendibilità dei risultati forniti su tutto il campo dei valori a cui si riferisce (punti di taratura inclusi).

[21] Tale relazione è equivalente a quanto si otterrebbe applicando la legge di propagazione dell'incertezza al modello matematico rappresentato dal polinomio interpolante.

Supponendo che la variabile casuale c sia distribuita normalmente, ci si deve aspettare, per un noto teorema della statistica, che il valore atteso del parametro χ^2 coincida con il numero di gradi di libertà ν

$$\chi^2 = \nu \qquad (41)$$

dove $$\chi^2 = (\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}})^{\mathbf{T}} \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{c})(\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}) \qquad (42)$$

e $$\nu = n - (m+1) \qquad (43)$$

Nel caso in cui si abbia $\chi^2 > \nu$ si ha una sottostima dell'incertezza relativa al processo di taratura: in altri termini, si può ritenere che nel modello impiegato per la stima dell'incertezza di misura si sia trascurata una (o più) fonti di incertezza. In questo caso, una ragionevole soluzione è quella di interpretare questa fonte come una sorgente di "rumore" additivo dovuta al modello, e quindi inserire nella matrice di varianza-covarianza V(c) un ulteriore contributo di incertezza in termini di scarto tipo[22]:

$$\mathbf{V}'(\mathbf{c}) = \mathbf{V}(\mathbf{c}) + s_m^2 \mathbf{I} \qquad (44)$$

La nuova matrice di varianza-covarianza V'(c) da utilizzare per la determinazione dell'equazione di taratura viene ricavata tramite iterazioni successive, modificando arbitrariamente il valore di s_m^2 finché il valore dello scarto tipo quadratico s_m^2 garantisce che il valore di χ^2 sia prossimo a quello dei gradi di libertà.

Nella situazione invece in cui si abbia $\chi^2 < \nu$ non si hanno informazioni per poter ipotizzare una eventuale incompletezza del modello: in questo caso si accetta quindi la soluzione ottenuta mediante la matrice di varianza-covarianza V(c).

[22] Si ricordi, a questo proposito, quanto detto circa l'introduzione della quantità δ nella (1) del § 3.1.

3.8.1 Esempio

Consideriamo un processo di taratura con i seguenti dati:

Punto di misura l_i (*u.a.*)	Correzione c_i (*u.a.*)	Incertezza tipo composta[23] $u_c(c_i)$ (*u.a.*)
1000	- 4.88	2.15
2000	- 2.95	2.30
4000	- 9.68	6.60
6000	7.75	11.40
8000	7.00	6.40
9000	17.08	5.85

e assumiamo come modello matematico un polinomio di 1° grado (interpolazione rettilinea):

$$c = a_0 + a_1 l \qquad \text{(E3.1)}$$

Mediante i dati riportati nella precedente tabella è possibile costruire la matrice delle letture A, il vettore delle correzioni c e la diagonale principale della matrice di varianza-covarianza V(c) ad esso associata:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1000 \\ 1 & 2000 \\ 1 & 4000 \\ 1 & 6000 \\ 1 & 8000 \\ 1 & 9000 \end{bmatrix} \qquad \text{(E3.2)}$$

[23] Sono dati relativi ad una taratura realmente eseguita in cui l'incertezza tipo composta è stata determinata applicando la legge di propagazione dell'incertezza ai contributi legati al campione (certificato di taratura) e allo strumento in taratura (risoluzione e ripetibilità delle misure).

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4.88 \\ -2.95 \\ -9.68 \\ 7.75 \\ 7.00 \\ 17.08 \end{bmatrix} \tag{E3.3}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 4.62 & u(c_1,c_2) & \ldots & & & u(c_1,c_6) \\ \ldots & 5.29 & & & & \ldots \\ & & 43.56 & & & \\ & & & 129.96 & & \\ & & & & 40.96 & \\ u(c_6,c_1) & \ldots & & & & 34.22 \end{bmatrix} \tag{E3.4}$$

Restano quindi da stimare i termini di covarianza da inserire nella matrice V(c): assumendo che la correlazione tra i punti di taratura sia legata principalmente all'utilizzo dello stesso strumento campione si può ipotizzare un coefficiente di correlazione unitario:

$$u(c_j, c_k) = u_{camp,j} u_{camp,k} \qquad j \neq k \qquad j, k = 1 \ldots 6 \tag{E3.5}$$

dove $u_{camp,j}$ e $u_{camp,k}$ sono le incertezze tipo *j*-esima e *k*-esima associate al campione di riferimento utilizzato per il confronto durante la taratura; per quanto riguarda il processo di taratura in oggetto si ha

Incertezza tipo campione $u_{camp,i}$ $(u.a.)$
1.58
1.58
1.58
4.78
4.78
4.78

da cui si ottiene la seguente matrice V(c)

$$\mathbf{V}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 4.62 & 2.49 & 2.49 & 7.55 & 7.55 & 7.55 \\ 2.49 & 5.29 & 2.49 & 7.55 & 7.55 & 7.55 \\ 2.49 & 2.49 & 43.56 & 7.55 & 7.55 & 7.55 \\ 7.55 & 7.55 & 7.55 & 129.96 & 22.84 & 22.84 \\ 7.55 & 7.55 & 7.55 & 22.84 & 6.40 & 22.84 \\ 7.55 & 7.55 & 7.55 & 22.84 & 22.84 & 34.22 \end{bmatrix} \qquad \text{(E3.6)}$$

Applicando le formule risolutive si ottiene quindi:

vettore delle correzioni $\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -7.9006 \\ 0.0023 \end{bmatrix}$ (E3.7)

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 2.8301 & -0.0000013 \\ -0.0000013 & 0.0000003 \end{bmatrix} \qquad \text{(E3.8)}$$

matrice di varianza-covarianza associata.

Si può quindi ottenere la stima della correzione e dell'incertezza associata in corrispondenza di tutto l'intervallo di taratura, ovvero fissato qualsiasi $\bar{l}$ al suo interno.

$\hat{c} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \bar{l} = -7.9006 + 0.0023\bar{l}$ (E3.9)

$$u_c(\hat{c}) = \sqrt{u^2(\hat{a}_0) + \bar{l}^2 u^2(\hat{a}_1) + 2\bar{l}u(\hat{a}_0, \hat{a}_1)} = \sqrt{2.8301 + \bar{l}^2 0.0000003 - 2\bar{l}\, 0.0000013} \qquad \text{(E3.10)}$$

Si deve infine procedere al controllo sui gradi di libertà:

$\nu = 4$ $\qquad\qquad$ $\chi^2 = 5.3$

Poiché $\chi^2 > \nu$ è necessario aggiungere alla matrice V(c) un ulteriore contributo di incertezza legato al modello adottato, secondo quanto indicato nel precedente paragrafo. Procedendo iterativamente si ottiene un valore di s_m^2 = 7.02 a cui corrisponde χ^2 = 4.02.

A questo punto si possono ricavare i nuovi parametri dell'equazione di taratura che devono essere utilizzati per ottenere le informazioni sulla stima della correzione e l'incertezza associata su tutto l'intervallo di taratura

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -8.4504 \\ 0.0023 \end{bmatrix} \tag{E3.11}$$

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 7.8764 & -0.0007261 \\ -0.0007261 & 0.0000005 \end{bmatrix} \tag{E3.12}$$

3.9 Attività sperimentali di prova: esempio

Supponiamo di dovere eseguire un'attività sperimentale di prova avente come scopo quello di determinare la stima di una grandezza *G* (misurando) e l'incertezza ad essa associata, essendo *G* funzione di 4 grandezze in ingresso *A*, *B*, *C*, *D*, secondo il modello matematico[24] descritto dalla seguente relazione funzionale *G*=*f*(•):

$$G = B\frac{A}{CD} \tag{E4.1}$$

Le grandezze in ingresso *A*, *C*, *D* sono misurate mediante uno stesso strumento, che presenta un'unità di formato pari a 0.2 $u.a._1$ e dal cui certificato di taratura si evince che è necessario applicare una correzione pari a -10% del valore letto, nel campo 0 $u.a._1$ ÷ 10 $u.a._1$. All'interno dello stesso campo l'incertezza estesa è dichiarata pari a 5% della lettura (distribuzione normale con livello di confidenza del 95.45%).

Si effettua una singola misura per ogni grandezza, ottenendo le seguenti letture:

[24] Un esempio pratico in cui si applica tale modello è dato da una prova per la determinazione della resistenza elettrica di un provino avente sezione rettangolare, a partire dalla resistività ρ del materiale, dalla lunghezza *l* del provino e dalle lunghezze d_1 e d_2 dei lati della sezione del provino: $R = \rho\frac{l}{d_1 d_2}$.

misura di A: 6.2 $u.a._1$

misura di C: 2.4 $u.a._1$

misura di D: 2.4 $u.a._1$

La grandezza B è invece misurata mediante uno strumento che presenta un'unità di formato pari a 0.1 $u.a._2$ e nel cui certificato di taratura l'incertezza estesa è dichiarata pari a 3% della lettura nel campo 0 $u.a._2$ ÷ 5 $u.a._2$ (distribuzione normale con livello di confidenza del 95.45%) e la correzione da apportare alla lettura è 0 $u.a._2$.

Si effettua anche con questo strumento una singola misura, ottenendo la lettura:

misura di B: 4.0 $u.a._2$

Per tutte e quattro le misure si ritiene che non vi siano altre fonti di incertezza, ad eccezione di quelle strumentali specificate.

Stima del misurando

La stima g del misurando si ottiene calcolando la relazione funzionale che definisce il modello matematico, in corrispondenza delle stime a, b, c, d delle grandezze in ingresso:

a = 5.58 $u.a._1$

b = 4.00 $u.a._2$

c = 2.16 $u.a._1$

d = 2.16 $u.a._1$

dove le stime delle grandezze in ingresso sono le misure con gli appropriati strumenti, corrette secondo quanto riportato nei rispettivi certificati di taratura.

Si ha quindi:

$$g = b\frac{a}{cd} = 4.7839\, u.a._2 / u.a._1 \qquad \text{(E4.2)}$$

Incertezza tipo composta

L'incertezza tipo composta associata alla stima del misurando si determina applicando la legge di propagazione dell'incertezza, noti i contributi di incertezza tipo delle stime delle grandezze in ingresso e calcolati i rispettivi coefficienti di sensibilità.

Si procede alle valutazioni dell'incertezza di categoria B a partire dai certificati di taratura degli strumenti utilizzati per le misure:

$$u(a) = \frac{U(a)}{k} = 0.1395\, u.a._1 \qquad \text{(E4.3)}$$

$$u(b) = \frac{U(b)}{k} = 0.0600\, u.a._2 \qquad \text{(E4.4)}$$

$$u(c) = \frac{U(c)}{k} = 0.0540\, u.a._1 \qquad \text{(E4.5)}$$

$$u(d) = \frac{U(d)}{k} = 0.0540\, u.a._1 \qquad \text{(E4.6)}$$

Quindi si calcolano i coefficienti di sensibilità:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{b}{cd} = 0.8573\, u.a._2\, u.a._1^{-2} \qquad \text{(E4.7)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{a}{cd} = 1.1960\, u.a._1^{-1} \qquad \text{(E4.8)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -\frac{ab}{c^2 d} = -2.2148\, u.a._2\, u.a._1^{-2} \qquad \text{(E4.9)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial d} = -\frac{ab}{cd^2} = -2.2148\, u.a._2\, u.a._1^{-2} \quad \text{(E4.10)}$$

Possiamo quindi applicare la legge di propagazione dell'incertezza, tenendo conto delle correlazioni tra le stime delle grandezze in ingresso *A*, *C* e *D*, in quanto ottenute dalle misure eseguite con lo stesso strumento.

Per le grandezze *C* e *D* si assume un coefficiente di correlazione unitario positivo, in quanto tali grandezze danno luogo alla stessa lettura sullo strumento. Per quanto riguarda la correlazione tra le grandezze *A* e *C*, *A* e *D*, la lettura dello strumento nel caso della grandezza *A* differisce da quelle relative alle grandezze *C* e *D* (di un fattore pari circa a 3). Nel caso in cui si disponga di un certificato di taratura riportante l'equazione di taratura che copre il campo di valori delle misure in oggetto, è possibile stimare correttamente il coefficiente di correlazione (vedi § 3.5.). Viceversa, è possibile solamente fare delle ipotesi motivate sul grado di correlazione: in ogni caso queste ipotesi non devono mai portare ad una sottostima dell'incertezza composta. Nel caso in esame, se l'incertezza di misura non rappresenta un parametro critico oppure se il costo di un'indagine più approfondita per determinare il coefficiente di correlazione non è commisurato all'importanza della misura, si può ancora ipotizzare un fattore di correlazione unitario negativo che, tenendo conto dei segni dei coefficienti di sensibilità, porta a una cautelativa sovrastima dell'incertezza composta.

Riassumendo:

$$r(c,d) = 1 \quad \text{(E4.11)}$$

$$r(a,c) = -1 \quad \text{(E4.12)}$$

$$r(a,d) = -1 \quad \text{(E4.13)}$$

da cui si ottiene

$$u_c(g) = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 u^2(b) + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 u^2(c) + \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 u^2(d) + \\ -2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial c}u(a)u(c) - 2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial d}u(a)u(d) + 2\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial d}u(c)u(d) \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(E4.14)}$$

$$u_c(g) = 0.3659\, u.a._2 / ua._1$$

Incertezza estesa

Essendo normale la distribuzione associata alla stima g del misurando, considerando un livello di confidenza del 95.45%, si passa dall'incertezza tipo composta a quella estesa moltiplicando per un fattore di copertura $k = 2$.

$$U(g) = 2\, u_c(g) = 0.73\ u.a._2/u.a._1 \qquad \text{(E4.15)}$$

Il risultato dell'attività sperimentale di prova può essere quindi espresso come:

$$(4.78 \pm 0.73)\ u.a._2/u.a._1 \qquad \text{(E4.16)}$$